Лекция 9.

Теория изменения давления в баротропной атмосфере. Изменения метеорологических элементов бароклинной атмосферы в квазигеострофическом приближении.

Цель: Постановка задачи о прогнозе крупномасштабных атмосферных движений, Показать изменения метеорологических элементов бароклинной атмосферы в квазигеострофическом приближении.

Основы математического моделирования атмосферных процессов, лектор ассоциированный профессор Маусумбекова Сауле Джумакановна

Постановка задачи о прогнозе крупномасштабных атмосферных движений

В качестве исходной возьмем систему полных уравнений гидротермодинамики (6.3)—(6.7) в изобарической системе координат:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\tau\frac{\partial u}{\partial p}=-g\frac{\partial H}{\partial x}+lv;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\tau\frac{\partial v}{\partial p}=-g\frac{\partial H}{\partial y}-lu;$$

$$T=-\frac{g}{R}p\frac{\partial H}{\partial p};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \tau}{\partial p}=0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{c^2}{Rp}\tau+\frac{1}{c_p\rho}\varepsilon, \qquad (10.1)$$

где

$$c^2=\frac{R^2T(\gamma_a-\gamma)}{g} \qquad (10.2)$$

Постановка задачи о прогнозе крупномасштабных атмосферных движений

$$\text{при } t=0 \quad u=u_0(x,\ y,\ p); \quad v=v_0(x,\ y,\ p);$$
$$H=H_0(x,\ y,\ p). \tag{10.3}$$

$$\text{при } p=P \quad \tau=\tau_1=g\rho_1\left(\frac{\partial H}{\partial t}+u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}\right), \tag{10.4}$$

где $P=1000$ мбар, ρ_1 — средняя плотность воздуха у поверхности земли.

Величина τ_1 по сравнению с τ на других уровнях мала, поэтому иногда вместо краевого условия (10.4) используется более простое:

$$\text{при } p=P \quad \tau=\tau_1=0. \tag{10.5}$$

В качестве второго краевого условия привлекается условие сохранения массы атмосферы. Это означает, что на верхней границе атмосферы $\rho w\to 0$. В изобарической системе координат при дополнительном предположении, что u и v ограничены, это условие имеет вид

$$\text{при } p\to 0 \quad \tau=\tau_0\to 0. \tag{10.6}$$

Постановка задачи о прогнозе крупномасштабных атмосферных движений

В частном случае указанная система уравнений может быть существенно упрощена. Это случай баротропной атмосферы, в которой, как уже говорилось, давление есть функция одной плотности или температуры. В такой атмосфере при $p = \text{const}$ будет и $T = \text{const}$, а изобары и изостеры, а значит, и изотермы параллельны. Из этого следует, что направление (но не скорость) геострофического ветра с высотой не изменяется. Из сказанного следует, что в данной модели атмосферы на любой изобарической поверхности изменения температуры во времени и вдоль изобарической поверхности отсутствуют. Следовательно, можно записать

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

или после замены температуры через высоты изобарических поверхностей с помощью уравнения статики

$$\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial y} = 0.$$

Постановка задачи о прогнозе крупномасштабных атмосферных движений

Поставим еще более жесткое условие. Положим, что направление и скорость действительного ветра с высотой остаются неизменными. Тогда, интегрируя приведенное соотношение по давлению от p до P и учитывая, что по условию скорость и направление ветра с высотой не изменяются, получаем

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}+u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}\right)\Big|_p-\left(\frac{\partial H}{\partial t}+u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}\right)\Big|_P=0.$$

В соответствии с краевым условием (10.4), второе слагаемое последнего соотношения равно $\tau_1/\rho_1 g=RT_1\tau_1/gP$, где T_1 — значение T при $p=P$.

Тогда мы можем записать

$$\frac{\partial H}{\partial t}+u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{RT_1}{gP}\tau_1=0.$$

Постановка задачи о прогнозе крупномасштабных атмосферных движений

Проинтегрировав уравнение неразрывности по давлению от p до P, учитывая неизменность ветра с высотой и краевые условия (10.6), получаем

$$\tau_1 = -\int_0^P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dp = -P\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Подставляя это выражение в предыдущее соотношение, получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u\frac{\partial H}{\partial x} + v\frac{\partial H}{\partial y} + q\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \qquad (10.9)$$

где $q = \tilde{c}^2/g$, $\tilde{c} = \sqrt{RT_1} = \sqrt{287 \cdot 300} \approx 290$ м/с — параметр, близкий к скорости звука.

Постановка задачи о прогнозе крупномасштабных атмосферных движений

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-g\frac{\partial H}{\partial x}+lv;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-g\frac{\partial H}{\partial y}-lu;$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}+u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}+q\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0. \qquad (10.10)$$

Это полная система уравнений гидродинамики для бароторопной атмосферы. Она может быть применена к любому уровню. Однако практика показала, что наилучшие результаты она дает применительно к средней части атмосферы (изобарическая поверхность 500 мбар).

Постановка задачи о прогнозе крупномасштабных атмосферных движений

К этой системе двухмерных уравнений мы вернемся в дальнейшем. А сейчас отметим, что система уравнений типа (10.10) может быть получена также исходя из иных позиций. Рассмотрим частный случай баротропности — однородную несжимаемую атмосферу ($\rho=\text{const}$), ограниченную сверху свободной поверхностью $h(x, y, t)$. По-прежнему будем считать, что ветер не изменяется с высотой. Интегрируя уравнение неразрывности для несжимаемой атмосферы

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

по высоте z от 0 до h и учитывая, что при $z=0$ $w=0$, а также неизменность ветра с высотой, получаем

$$w_h=-\int_0^h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dz=-h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

где w_h — вертикальная скорость перемещения свободной поверхности.

Постановка задачи о прогнозе крупномасштабных атмосферных движений

Для свободной поверхности справедливо соотношение $dh/dt = 0$, выражающее тот факт, что частицы жидкости при своем движении не проникают через эту поверхность, а перемещаются вдоль нее, т. е. поверхность как бы всегда состоит из одной и той же совокупности частиц. Из этого соотношения следует, что для свободной поверхности

$$w_h = \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y}.$$

Подставляя сюда полученное только что выражение для w_h, получаем

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} = -h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right). \qquad (10.11)$$

Для однородной атмосферы $p = g\rho(h - z)$, следовательно,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = g\frac{\partial h}{\partial x}; \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = g\frac{\partial h}{\partial y}.$$

Постановка задачи о прогнозе крупномасштабных атмосферных движений

Подставляя эти выражения в уравнения движения и учитывая условие неизменности ветра с высотой ($\partial u/\partial z=\partial v/\partial z=0$), получим два упрощенных уравнения движения. Объединяя эти два уравнения с уравнением (10.11), получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-g\frac{\partial h}{\partial x}+lv;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-g\frac{\partial h}{\partial y}-lu;$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}=-h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right). \tag{10.12}$$

Легко видеть, что полученная система уравнений аналогична системе (10.10). Различие же между ними состоит в том, что уравнения (10.10) записаны в изобарической, а (10.12) — в декартовой системах координат.

Теория изменения давления в баротропной атмосфере. Изменения метеорологических элементов бароклинной атмосферы в квазигеострофическом приближении.

Как уже говорилось, баротропной называется среда, в которой давление является функцией одной плотности или одной температуры. В баротропной среде изобары и изотермы или изостеры параллельны. В этом случае система прогностических уравнений существенно упрощается, а в предположении квазигеострофичности движения сводится к одному уравнению для давления или высоты изобарической поверхности. Это уравнение может быть получено различными способами.

Наиболее простой путь сводится к следующему. Возьмем упрощенное уравнение вихря скорости

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial x} + v \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial y} = -l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \qquad (2.1)$$

и уравнение неразрывности, из которого следует, что горизонтальная дивергенция выражается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \tau}{\partial p}. \qquad (2.2)$$

Исключая дивергенцию из уравнения вихря скорости, получаем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial x} + v \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial y} = l \frac{\partial \tau}{\partial p}. \qquad (2.3)$$

Теория изменения давления в баротропной атмосфере. Изменения метеорологических элементов бароклинной атмосферы в квазигеострофическом приближении.

В соответствии с краевыми условиями на верхней и нижней границах атмосферы $\tau=0$. Но в этом случае в атмосфере должен существовать уровень, для которого $\partial\tau/\partial p=0$. В таком случае уравнение вихря скорости получает вид

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}+u\frac{\partial(\Omega+l)}{\partial x}+v\frac{\partial(\Omega+l)}{\partial y}=0. \tag{2.4}$$

Воспользуемся теперь результатами, полученными в предыдущем параграфе при разложении компонент ветра по степеням малого параметра ε. Ограничиваясь только первым членом разложения, т. е. полагая, что $u'=v'=0$, имеем:

$$u=-\frac{g}{l}\frac{\partial H}{\partial y};\quad v=\frac{g}{l}\frac{\partial H}{\partial x};\quad \Omega=\frac{g}{l}\Delta H, \tag{2.5}$$

где $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$.

Подставляя эти соотношения в уравнение (2.4), получаем

$$\Delta\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial\left(\frac{g}{l}\Delta H+l\right)}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial\left(\frac{g}{l}\Delta H+l\right)}{\partial y}=0.$$

Последнее выражение можно записать сокращенно

$$\Delta\frac{\partial H}{\partial t}+\left(H,\ \frac{g}{l}\Delta H+l\right)=0. \tag{2.6}$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Постановка задачи о прогнозе крупномасштабных атмосферных движений:

- Основные уравнения;
- начальные условия;
- граничные условия.

2. Модель баротропной атмосферы
3. Модель бароклинной атмосферы в квазигеострофическом приближении

Теория изменения давления в баротропной атмосфере. Изменения метеорологических элементов бароклинной атмосферы в квазигеострофическом приближении.

Введем обозначение

$$A_\Omega = -\frac{l}{g}\left[u_g \frac{\partial(\Omega_g + l)}{\partial x} + v_g \frac{\partial(\Omega_g + l)}{\partial y}\right] = -\left(H, \frac{g}{l}\Delta H + l\right), \quad (2.7)$$

где u_g, v_g и Ω_g — геострофические значения u, v и Ω.

Введенная функция A_Ω пропорциональна геострофической адвекции вихря скорости. При адвекции положительного (циклонического) вихря она положительна, при адвекции отрицательного (антициклонического) вихря — отрицательна.

Запишем теперь уравнение (2.6) короче, в виде

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial t} = A_\Omega. \quad (2.8)$$